



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)

Resumen de la Unidad:

En esta unidad el estudiante estudiará las relaciones entre segmentos en cuerdas, tangentes y secantes como aplicación de semejanza. Estos prueban teoremas básicos sobre círculos: una tangente es perpendicular a la radio, teorema de ángulo inscrito y teoremas de cuerdas y tangentes que implica longitudes de segmentos y medidas de ángulos.

Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)

PE1 ¿Cómo la geometría explica y describe la estructura de nuestro mundo?

CD1 Las ideas geométricas y sus relaciones permiten múltiples acercamientos a problemas geométricos y sus conexiones con otros contextos.

PE2 ¿Cuáles son las maneras de explicar las relaciones entre círculos semejantes?

CD2 Todos los círculos son semejantes. Esta afirmación es demostrada al determinar la proporción de circunferencia a diámetro.

PE3 ¿Cómo puede las relaciones entre ángulos y arcos profundizar el entendimiento sobre los círculos?

CD3 Existen relaciones entre los ángulos centrales, inscritos y circunscritos, y los arcos que interceptan.

Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)

T1. El estudiante será capaz de usar fórmulas para describir, identificar y construir figuras geométricas.

El estudiante adquiere destrezas para...

A1. Identificar y justificar relaciones entre ángulos y los arcos.

A2. Justificar que todos los círculos son semejantes.

A3. Analizar los elementos de las figuras geométricas.

Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)

Estándar de Geometría



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

9.G.8.1	Demuestra que todos los círculos son semejantes.
9.G.8.2	Identifica y describe relaciones entre ángulos inscritos, radios y cuerdas (incluir las relaciones entre ángulos centrales, inscritos y circunscritos; los ángulos inscritos en un semicírculo son ángulos rectos; el radio de un círculo es perpendicular a la tangente al punto donde el radio interseca el círculo).
9.G.8.3	Construye círculos inscritos y circunscritos en un triángulo y demuestra las propiedades de los ángulos de un cuadrilátero inscrito en un círculo.
(+)9.G.8.4	Construye una recta tangente a un círculo dado desde un punto exterior al círculo.
9.G.9.2	Construye un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular inscrito en una circunferencia.
Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)	
PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: 9.G.8.1 9.G.8.2 9.G.8.4 (+) 9.G.9.2</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1</p>	<p><i>Segmentos, rectas y ángulos en el círculo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Que todos los círculos son semejantes. Cómo categorizar las relaciones entre los ángulos inscritos, radios y las cuerdas. La relación entre los ángulos centrales, inscritos y circunscritos. Cómo identificar los ángulos inscritos en una semicircunferencia y comprobar que son ángulos rectos. Cómo identificar el radio de un círculo como perpendicular a la tangente donde el radio intercepte en el círculo. Cómo construir una 	<p><i>Formas geométricas y propiedades</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Reconocer e identificar las partes del círculo (radio, diámetro, cuerda, secante, tangente, ángulos centrales, inscritos y circunscritos, arcos menores, mayores, semicírculo). Describir las propiedades del círculo y sus partes. Establecer la relación entre los ángulos centrales, inscritos y circunscritos. Aplicar las propiedades de los círculos y sus partes para hallar la longitud de 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección 'Tareas de desempeño' al final de este mapa.</i></p> <p><i>Rompecabezas de círculo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes hallan la medida del ángulo que falta de un ángulo inscrito usando la tangente, secante, cuerdas y ángulos marcados. (ver abajo) <p><i>Inscribir y circunscribir triángulos rectángulos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes trabajarán en grupos para evaluar las posibles soluciones y 	<p><i>Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Utiliza un compás para trazar un círculo con un radio de 2.5 centímetros. Divide el círculo en 6 partes iguales. Oscurece una de las seis partes. Las preguntas a continuación se tratarán del área oscurecida. Escribe las medidas asociadas al círculo. Circunferencia Área: _____ Escribe las medidas asociadas al sector oscurecido del círculo. Ángulo central: _____ Ángulo del sector: _____ Longitud del arco formado por el sector: _____ Describe una fórmula que pueda usarse para hallar la longitud del arco. Utiliza el vocabulario adecuado (circunferencia, ángulo central, etc.) para explicar qué variables se usan en los cálculos. Describe una fórmula que pueda utilizarse para hallar el área del sector. Nuevamente, deberás utilizar la terminología apropiada para las variables que se utilizarán en el cálculo <p>(Fuente: http://alex.state.al.us/uploads/26412/ArcLengthandSectorAreaJournalActivity.rtf)</p>	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Cómo hallar la longitud del arco de un círculo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes exploran la fórmula de la longitud del arco al comparar la longitud hallada usando un cordón con la longitud hallada usando la fórmula. Los estudiantes pueden crear sus propios arcos y comparar varios círculos o arcos. Materiales: pedazo de cordón, regla, hoja en blanco y un transportador. (ver anejo: "9.3 Actividad de aprendizaje – Como hallar la longitud del arco de un círculo") <p><i>Ejemplo 1 para planes de la lección: Longitud y área del sector de un arco</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes se dividen en grupos para descubrir las relaciones entre la longitud del arco, la medida del ángulo central y la circunferencia. Descubrirán también la relación entre el área del círculo, las medidas del ángulo central y el área del sector. Los estudiantes compartirán sus hallazgos y crearán fórmulas para calcular la longitud del arco y el área del sector. Para materiales, dirigirse a



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
	<p>recta tangente a un círculo dado desde un punto exterior al círculo.</p>	<p>segmentos (radio, cuerda, diámetro) y ángulos (ángulos centrales, ángulos inscritos, ángulos circunscritos) y arcos (arcos mayores, arcos menores y semicírculo).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar las propiedades del círculo y de sus partes incluyendo la semejanza de los círculos para la solución de problemas. • Utilizar varios métodos para hallar el área de regiones circulares, de rectángulos, trapezoides y otras más complejas. 	<p>compartir sus reportes con la clase. (ver abajo)</p>	<p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Dibuja un círculo. Agrega dos círculos y dos líneas al dibujo para asegurarte que tengas lo siguiente: una línea radical, un centro radical, una línea tangente y una línea secante. Describe cada uno de los términos mencionados anteriormente con tus propias palabras. <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i></p> <p>Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • En la clase de hoy aprendí _____. • Hoy estuve confundido con _____. 	<p>http://alex.state.al.us/lesson_view.php?id=26412. <i>Ejemplo 2 para planes de la lección: Circular el cuadrado, pelea en el cuadrilátero de boxeo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Explore las especificaciones modernas para la construcción de cuadriláteros de boxeo. Apliquen varios métodos para hallar el área de círculos, rectángulos, trapezoides y coberturas de área complejas, y comparen y contrasten las áreas y superposiciones de ataque y defensa en el ring (ver anejo: “9.3 Ejemplo para plan de lección– Circular el cuadrado”).

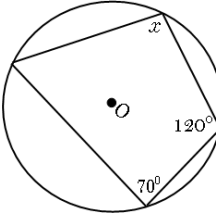
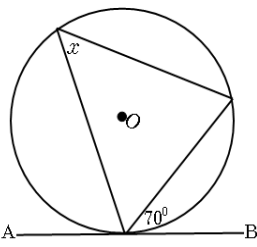


Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
Vocabulario de Contenido					
<ul style="list-style-type: none"> • Círculo • Ángulo inscrito • Ángulo central • Ángulo circunscrito • Radio/radios • Cuerdas • Diámetro • Ángulos rectos • Perpendicular • Tangente • Secante • Longitud del arco • Sector circular • Área • Congruente 					



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de Objetivos de Aprendizaje	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: 9.G.8.1 9.G.8.3</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2</p> <p>T/A: T1/A1</p>	<ul style="list-style-type: none"> Como probar que todos los círculos son semejantes. 	<ul style="list-style-type: none"> Utilizar razones para representar la relación de semejanza entre dos círculos. Calcular y demostrar por medio de una proporción de circunferencia a diámetro la semejanza entre dos círculos. Reconocer que si dos círculos tienen el mismo radio son congruentes y si sus radios miden distinto, entonces son semejantes. Y todos los círculos congruentes son semejantes. Investigar y describir 	<p><i>Los círculos y sus relaciones</i></p> <ul style="list-style-type: none"> El estudiante probará que dos círculos son semejantes al usar el teorema de círculos congruentes. (ver abajo) <p><i>Presentación de teoremas de círculos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> El estudiante usa instrumentos de presentación electrónicos para justificar el teorema de cinco círculos y compartir sus estrategias con la clase. 	<p><i>Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> El siguiente círculo tiene el centro en O, ¿cuál es la medida del ángulo X?  <ul style="list-style-type: none"> Describe el teorema y el procedimiento para encontrar la medida del ángulo x del siguiente diagrama.  <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p>	<p><i>Investigar los teoremas de círculos con Geogebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Esta actividad ayuda a los estudiantes a incrementar sus conocimientos previos en geometría para explorar teoremas de círculos usando páginas web interactivas con URLs dentro de las actividades. Los estudiantes pueden ver y manipular las imágenes y los pueden utilizar para deducir los teoremas ellos mismos. Ellos pueden evaluar su entendimiento sobre algunos de los teoremas. <p>(Fuente: http://www.sharemylesson.com/teaching-resource/Investigating-Circle-Theorems-with-Geogebra-6120036/)</p>



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados deseados)			ETAPA 2 (Evidencia)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de Objetivos de Aprendizaje	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
		las propiedades de los cuadriláteros cíclicos. <ul style="list-style-type: none"> • Aplicará los teoremas relacionados con ángulos en el círculo y semicírculo y teoremas de tangentes. 		<ul style="list-style-type: none"> • ¿Con cuál de los teoremas de círculo tienes mayor dificultad y por qué? • ¿Cómo sabes que cuando dos círculos son semejantes? <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Use la información para orientar la clase del día. • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • En la clase de hoy aprendí _____. • Hoy estuve confundido con _____. 	
Vocabulario de Contenido					
<ul style="list-style-type: none"> • Cuadriláteros cíclicos • Teorema del Ángulo en el centro • Teorema de ángulos subtendidos por un mismo arco. • Teorema del ángulo en el semi-círculo • Teorema de ángulos en el mismo segmento • Teorema de cuadrilátero cíclico • Teorema de dos tangentes de un punto. • Teorema de la tangente. 					



Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)

Conexiones a la literatura sugeridas

- **Edwin Abbott**
 - *Planilandia*
- **Rod Clement**
 - *Counting on Frank*
- **Launa K. Mitten**
 - *Figuras Tridimensionales: Cilindros*
- **Cindy Neuschwander**
 - *Sir Cumference and the First Round Table*

Recursos adicionales

- <http://map.mathshell.org/materials/download.php?fileid=1194>
- Rompecabezas de círculo: http://www.isbe.net/ils/math/stage_J/9BJ.pdf
- Investigar los teoremas de círculos con Geogebra: <http://www.geogebra.org/cms/en/>
- Juego de repaso que puede jugarse para repasar cualquier contenido: http://www.ilovemath.org/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=34&Itemid=31
- Los círculos y sus relaciones: https://www.georgiastandards.org/Common-Core/Common%20Core%20Frameworks/CCGPS_Math_9-12_AccelCoorAlgebraAnalyticGeom_Unit9SE.pdf

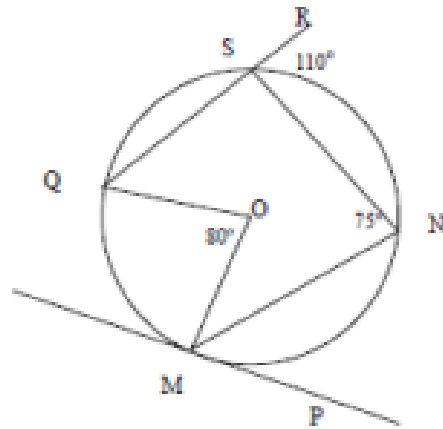
Unidad 9.3: Círculos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

Tarea de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Titulo III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

Rompecabezas de Circulo

- Los estudiantes hallan la medida del ángulo que falta de un ángulo inscrito usando la tangente, secante, cuerdas y ángulos marcados. Los estudiantes deberán incluir: cálculos rotulados, trabajo organizado, respuesta correcta
- Tarea: Halla la medida del $\angle OQS$ en la siguiente figura. O es el centro del círculo. $\angle RSN$ mide 110° . $\angle SNM$ mide 75° . MP es la tangente del círculo en M. $\angle QOM$ mide 80° . S, Q, M y N están dentro del círculo.



- Evalua el trabajo de los estudiantes usando la rúbrica de tarea de desempeño (ver anejo: “Organizador– Rúbrica de tarea de desempeño”).

Inscribir y circunscribir triángulos rectángulos

- Esta es una evaluación sobre inscribir y circunscribir triángulos dentro de círculos. (ver anejo: “9.3 Tarea de desempeño- Inscribir y circunscribir triángulos rectángulos”). Los estudiantes trabajarán en grupos para evaluar las mejores posibles soluciones y compartir sus reportes con la clase. Esta tarea les dará a los estudiantes la oportunidad de evaluar una variedad de posibles acercamientos a la tarea sin proporcionar una estrategia de solución completa. De a los estudiantes problemas para que resuelvan. Tenga a mano compases, lápices, reglas y transportadores disponibles para los



Unidad 9.3: Círculos Matemáticas 6 semanas de instrucción

estudiantes que los necesiten. Después de que los estudiantes tengan el tiempo suficiente para resolver el problema, haga que intercambien las respuestas con otro grupo. Entregue a cada grupo una copia de los ejemplos de respuestas y que revisen el trabajo los unos de los otros.

- Anime a los estudiantes a que hagan más que revisar si las respuestas están correctas; pídale que respondan las preguntas que están debajo de cada ejemplo. Revise para ver cuál de las explicaciones les cuesta más a los estudiantes poder comprender. Note las similitudes y las diferencias entre los ejemplos de respuestas y la que los estudiantes tomaron en el trabajo en grupos.

Los círculos y sus relaciones

- Parte 1: Considere los siguientes teoremas:
 - En el mismo círculo o en círculos congruentes, si dos cuerdas son congruentes entonces los arcos que se interceptan son congruentes.
 - En mismo círculo o en círculos congruentes, si dos arcos son congruentes entonces sus cuerdas son congruentes.
 - Comprueba que estos dos teoremas son verdaderos.
 - Escribe los dos teoremas como una proposición bicondicional.
- Parte 2: Use un compás para construir un círculo en una hoja en blanco. Etiquete el centro del círculo.
 - Dibuja en el círculo una cuerda diferente a la del diámetro.
- Use el compás y una regla de borde para construir un segmento que represente la distancia del centro de círculo a la cuerda. ¿Cuál es la relación entre la cuerda y el segmento que representa esta distancia?
- Luz hace la siguiente conjetura: “Si dos cuerdas de un círculo están a la misma distancia del centro, entonces las cuerdas son congruentes”. La proposición de Luz es correcta. Usa lo que aprendiste de la parte 1a para ayudarte a convencer a Luz de que su proposición es correcta.
- Proponga lo opuesto de la conjetura de Luz.
- Escribe la conjetura de Luz y el opuesto como una proposición bicondicional.

(Fuente: https://www.georgiastandards.org/Common-Core/Common%20Core%20Frameworks/CCGPS_Math_9-12_AccelCoorAlgebraAnalyticGeom_Unit9SE.pdf)